

וקטורים וגאומטריה במרחב

וקטורים וגאומטריה במרחב – שאלה 2 (לרוב) בשאלון 472.

שאלון 472

בחוברת: תקציר תיאוריה ונוסחאות • 3 דוגמאות פתורות • 47 תרגילים מקוריים עם תשובות • 22 שאלות בגרות קודמות בנושא (קישורים).

1. תקציר תיאוריה ונוסחאות

וקטורים

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$ ניצבות; $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$
- $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$. וקטורים בגוף (תיבה, פירמידה): מבטאים כל וקטור כצירוף של וקטורי בסיס.
- חלוקת קטע ביחס $m : n$: $\vec{OP} = \frac{n\vec{OA} + m\vec{OB}}{m+n}$.

וקטורים בגופים

- בוחרים שלושה וקטורי בסיס ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ למשל) לאורך מקצועות היוצאים מקודקוד אחד) ומבטאים כל וקטור כצירוף שלהם בעזרת "מסלול" בין נקודות.
- אמצע קטע: $\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ כאשר M אמצע BC .
- אם וקטורי הבסיס מאונכים זה לזה: $(a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}) \cdot (a'\vec{u} + b'\vec{v} + c'\vec{w}) = aa'|\vec{u}|^2 + bb'|\vec{v}|^2 + cc'|\vec{w}|^2$.

וקטורים במערכת צירים

- בתיבה שקודקוד אחד שלה בראשית והמקצועות על הצירים – כל קודקוד הוא צירוף של אורכי המקצועות.
- וקטור בין נקודות: $\vec{AB} = B - A$; אורך: $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.
- הזווית בין וקטורים: $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$. שטח משולש: $\frac{1}{2}|\vec{AB}||\vec{AC}| \sin \theta$.

טיפים

- הוכחת ניצבות – מכפלה סקלרית אפס. ישר מאונך למישור – אם הוא מאונך לשני ישרים נחתכים במישור.

דוגמה 1 ★★☆☆

נתונים הווקטורים $\vec{u} = (-4, -2, 0)$ ו- $\vec{v} = (-2, k, -1)$.

א. מצאו את k שעבורו $\vec{u} \perp \vec{v}$.

ב. עבור k שמצאתם, חשבו את $|\vec{u} + \vec{v}|$ ואת הזווית בין $\vec{u}$ ל- $\vec{u} + \vec{v}$.

פתרון:

$$1. \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ נותן משוואה ליניארית ב-} k: k = 4.$$

$$2. \vec{u} + \vec{v} = (-6, 2, -1), |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{41} \text{ (וגם } \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2} = \sqrt{41} \text{ כי הם מאונכים).}$$

$$3. \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})}{|\vec{u}| |\vec{u} + \vec{v}|} = \frac{20}{2\sqrt{205}}, \theta \approx 45.7^\circ.$$

תשובה: א. $k = 4$; ב. $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{41}$, $\theta \approx 45.7^\circ$.

דוגמה 2 ★★☆☆

בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $D(0, 2, 0)$, $A'(0, 0, 4)$.

א. מצאו את שיעורי הקודקודים C' ו- D' , ואת שיעורי M – אמצע המקצוע $B'C'$.

ב. חשבו את הזווית בין הווקטורים $\vec{AC'}$ ו- $\vec{BD'}$ (אלכסוני התיבה).

ג. חשבו את שטח המשולש ABM .

פתרון:

$$1. M(2, 1, 4), D'(0, 2, 4), C'(2, 2, 4).$$

$$2. \vec{BD'} = (-2, 2, 4), \vec{AC'} = (2, 2, 4).$$

$$3. \cos \theta = \frac{\vec{AC'} \cdot \vec{BD'}}{|\vec{AC'}| |\vec{BD'}|} = \frac{16}{24}, \theta \approx 48.19^\circ.$$

$$4. \vec{AB} \perp \vec{BM} \text{ (כי } \vec{AB} \cdot \vec{BM} = 0 \text{)}, \text{ לכן } S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BM = \sqrt{17} \approx 4.12.$$

תשובה: א. $C'(2, 2, 4)$, $D'(0, 2, 4)$, $M(2, 1, 4)$; ב. $\approx 48.19^\circ$; ג. $S = \sqrt{17}$.

דוגמה 3 ★★ ★

בפירמידה $ABCE$ המקצועות AB, AC, AE מאונכים זה לזה. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}, \vec{AC} = \vec{v}, \vec{AE} = \vec{w}$, ונתון $|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 4, |\vec{w}| = 2$. D אמצע BC , ו- M נקודה על ED כך ש- $EM = \frac{1}{3}ED$.
 א. הביעו את $\vec{ED}$ ואת $\vec{AM}$ באמצעות $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
 ב. חשבו את $\vec{AM} \cdot \vec{ED}$. האם $AM \perp ED$?
 ג. חשבו את אורך AM .

פתרון:

1. $\vec{ED} = \vec{AD} - \vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$ ולכן $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$.
2. $\vec{AM} = \vec{w} + \frac{1}{3}\vec{ED} = \frac{1}{6}\vec{u} + \frac{1}{6}\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w}$.
3. כיוון ש- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ - לא מאונכים. $\vec{AM} \cdot \vec{ED} = \frac{1}{12} \cdot 9 + \frac{1}{12} \cdot 16 - \frac{2}{3} \cdot 4 = -\frac{7}{12}$.
4. $AM = \frac{\sqrt{89}}{6} \approx 1.57, |\vec{AM}|^2 = \frac{1}{36} \cdot 9 + \frac{1}{36} \cdot 16 + \frac{4}{9} \cdot 4 = \frac{89}{36}$.

תשובה: א. $\vec{ED} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}, \vec{AM} = \frac{1}{6}\vec{u} + \frac{1}{6}\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w}$. ב. $-\frac{7}{12}$. ג. $AM = \frac{\sqrt{89}}{6}$ - לא מאונכים.

3. תרגילים

רמת קושי: ★ בסיסי • ★★ בינוני • ★★★ מתקדם. התשובות הסופיות בסוף החוברת; פתרון מלא ורמזים לכל תרגיל זמינים באתר.

תרגיל 1 ★★ ★ (T09-004)

בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון $A(0, 0, 0), B(6, 0, 0), D(0, 4, 0), A'(0, 0, 6)$.
 א. מצאו את שיעורי הקודקודים C' ו- D' , ואת שיעורי M - אמצע המקצוע $B'C'$.
 ב. חשבו את הזווית בין הווקטורים $\vec{AC'}$ ו- $\vec{BD'}$ (אלכסוני התיבה).
 ג. חשבו את שטח המשולש ABM .

תרגיל 2 ★★ ★ (T09-005)

בפירמידה $ABCE$ המקצועות AB, AC, AE מאונכים זה לזה. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}, \vec{AC} = \vec{v}, \vec{AE} = \vec{w}$, ונתון $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 6, |\vec{w}| = 2$. D אמצע BC , ו- M נקודה על ED כך ש- $EM = \frac{1}{3}ED$.
 א. הביעו את $\vec{ED}$ ואת $\vec{AM}$ באמצעות $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
 ב. חשבו את $\vec{AM} \cdot \vec{ED}$. האם $AM \perp ED$?
 ג. חשבו את אורך AM .

תרגיל 3 ★★ ★ (T09-006)

נתונים הווקטורים $\vec{u} = (0, -4, -4)$ ו- $\vec{v} = (-2, k, 1)$.
 א. מצאו את k שעבורו $\vec{u} \perp \vec{v}$.
 ב. עבור k שמצאתם, חשבו את $|\vec{u} + \vec{v}|$ ואת הזווית בין $\vec{u}$ ל- $\vec{u} + \vec{v}$.

תרגיל 4 ★★☆☆ (T09-007)

בתיבה $ABCD A' B' C' D'$ נתון $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $D(0, 3, 0)$, $A'(0, 0, 4)$.
 א. מצאו את שיעורי הקודקודים C' ו- D' , ואת שיעורי M – אמצע המקצוע $B'C'$.
 ב. חשבו את הזווית בין הווקטורים $\vec{AC'}$ ו- $\vec{BD'}$ (אלכסוני התיבה).
 ג. חשבו את שטח המשולש ABM .

תרגיל 5 ★★☆☆ (T09-008)

בפירמידה $ABCE$ המקצועות AB , AC , AE מאונכים זה לזה. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AC} = \vec{v}$, $\vec{AE} = \vec{w}$, ונתון $|\vec{u}| = 6$, $|\vec{v}| = 4$, $|\vec{w}| = 4$.
 א. הביעו את $\vec{ED}$ ואת $\vec{AM}$ באמצעות $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.
 ב. חשבו את $\vec{AM} \cdot \vec{ED}$. האם $AM \perp ED$?
 ג. חשבו את אורך AM .

תרגיל 6 ★★☆☆ (T09-009)

נתונים הווקטורים $\vec{u} = (4, 4, -1)$ ו- $\vec{v} = (-4, 3, k)$.
 א. מצאו את k שעבורו $\vec{u} \perp \vec{v}$.
 ב. עבור k שמצאתם, חשבו את $|\vec{u} + \vec{v}|$ ואת הזווית בין $\vec{u}$ ל- $\vec{u} + \vec{v}$.

תרגיל 7 ★★☆☆ (T09-010)

בתיבה $ABCD A' B' C' D'$ נתון $A(0, 0, 0)$, $B(3, 0, 0)$, $D(0, 2, 0)$, $A'(0, 0, 4)$.
 א. מצאו את שיעורי הקודקודים C' ו- D' , ואת שיעורי M – אמצע המקצוע $B'C'$.
 ב. חשבו את הזווית בין הווקטורים $\vec{AC'}$ ו- $\vec{BD'}$ (אלכסוני התיבה).
 ג. חשבו את שטח המשולש ABM .

תרגיל 8 ★★☆☆ (T09-011)

בפירמידה $ABCE$ המקצועות AB , AC , AE מאונכים זה לזה. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AC} = \vec{v}$, $\vec{AE} = \vec{w}$, ונתון $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 2$, $|\vec{w}| = 6$.
 א. הביעו את $\vec{ED}$ ואת $\vec{AM}$ באמצעות $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.
 ב. חשבו את $\vec{AM} \cdot \vec{ED}$. האם $AM \perp ED$?
 ג. חשבו את אורך AM .

תרגיל 9 ★★☆☆ (T09-012)

נתונים הווקטורים $\vec{u} = (-2, 4, -4)$ ו- $\vec{v} = (k, -1, 2)$.
 א. מצאו את k שעבורו $\vec{u} \perp \vec{v}$.
 ב. עבור k שמצאתם, חשבו את $|\vec{u} + \vec{v}|$ ואת הזווית בין $\vec{u}$ ל- $\vec{u} + \vec{v}$.

תרגיל 10 ★★☆☆ (T09-013)

בתיבה $ABCD A' B' C' D'$ נתון $A(0, 0, 0)$, $B(6, 0, 0)$, $D(0, 3, 0)$, $A'(0, 0, 4)$.
 א. מצאו את שיעורי הקודקודים C' ו- D' , ואת שיעורי M – אמצע המקצוע $B'C'$.
 ב. חשבו את הזווית בין הווקטורים $\vec{AC'}$ ו- $\vec{BD'}$ (אלכסוני התיבה).
 ג. חשבו את שטח המשולש ABM .

תרגיל 11 ★★☆☆ (T09-014)

בפירמידה $ABCE$ המקצועות AB, AC, AE מאונכים זה לזה. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}, \vec{AC} = \vec{v}, \vec{AE} = \vec{w}$, ונתון $|\vec{u}| = 6, |\vec{v}| = 3, |\vec{w}| = 2$. D אמצע BC , ו- M נקודה על ED כך ש- $EM = \frac{2}{3}ED$.
 א. הביעו את $\vec{ED}$ ואת $\vec{AM}$ באמצעות $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
 ב. חשבו את $\vec{AM} \cdot \vec{ED}$. האם $AM \perp ED$?
 ג. חשבו את אורך AM .

תרגיל 12 ★★☆☆ (T09-015)

נתונים הווקטורים $\vec{u} = (-2, 1, -3)$ ו- $\vec{v} = (3, k, -1)$.
 א. מצאו את k שעבורו $\vec{u} \perp \vec{v}$.
 ב. עבור k שמצאתם, חשבו את $|\vec{u} + \vec{v}|$ ואת הזווית בין $\vec{u}$ ל- $\vec{u} + \vec{v}$.

תרגיל 13 ★★☆☆ (T09-016)

בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון $A(0, 0, 0), B(4, 0, 0), D(0, 4, 0), A'(0, 0, 4)$.
 א. מצאו את שיעורי הקודקודים C' ו- D' , ואת שיעורי M – אמצע המקצוע $B'C'$.
 ב. חשבו את הזווית בין הווקטורים $\vec{AC'}$ ו- $\vec{BD'}$ (אלכסוני התיבה).
 ג. חשבו את שטח המשולש ABM .

תרגיל 14 ★★☆☆ (T09-017)

בפירמידה $ABCE$ המקצועות AB, AC, AE מאונכים זה לזה. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}, \vec{AC} = \vec{v}, \vec{AE} = \vec{w}$, ונתון $|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 4, |\vec{w}| = 2$. D אמצע BC , ו- M נקודה על ED כך ש- $EM = \frac{1}{4}ED$.
 א. הביעו את $\vec{ED}$ ואת $\vec{AM}$ באמצעות $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
 ב. חשבו את $\vec{AM} \cdot \vec{ED}$. האם $AM \perp ED$?
 ג. חשבו את אורך AM .

תרגיל 15 ★★☆☆ (T09-018)

נתונים הווקטורים $\vec{u} = (-4, 4, -4)$ ו- $\vec{v} = (-1, 4, k)$.
 א. מצאו את k שעבורו $\vec{u} \perp \vec{v}$.
 ב. עבור k שמצאתם, חשבו את $|\vec{u} + \vec{v}|$ ואת הזווית בין $\vec{u}$ ל- $\vec{u} + \vec{v}$.

תרגיל 16 ★★☆☆ (T09-019)

בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון $A(0, 0, 0), B(2, 0, 0), D(0, 3, 0), A'(0, 0, 2)$.
 א. מצאו את שיעורי הקודקודים C' ו- D' , ואת שיעורי M – אמצע המקצוע $B'C'$.
 ב. חשבו את הזווית בין הווקטורים $\vec{AC'}$ ו- $\vec{BD'}$ (אלכסוני התיבה).
 ג. חשבו את שטח המשולש ABM .

תרגיל 17 ★★☆☆ (T09-020)

בפירמידה $ABCE$ המקצועות AB, AC, AE מאונכים זה לזה. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}, \vec{AC} = \vec{v}, \vec{AE} = \vec{w}$, ונתון $|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 6, |\vec{w}| = 6$. D אמצע BC , ו- M נקודה על ED כך ש- $EM = \frac{1}{4}ED$.
 א. הביעו את $\vec{ED}$ ואת $\vec{AM}$ באמצעות $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
 ב. חשבו את $\vec{AM} \cdot \vec{ED}$. האם $AM \perp ED$?
 ג. חשבו את אורך AM .

תרגיל 18 ★★☆☆ (T09-021)

נתונים הווקטורים $\vec{u} = (4, -2, 4)$ ו- $\vec{v} = (-3, k, -2)$.

א. מצאו את k שעבורו $\vec{u} \perp \vec{v}$.

ב. עבור k שמצאתם, חשבו את $|\vec{u} + \vec{v}|$ ואת הזווית בין $\vec{u}$ ל- $\vec{u} + \vec{v}$.

תרגיל 19 ★★☆☆ (T09-022)

בפירמידה $ABCE$ המקצועות AB, AC, AE מאונכים זה לזה. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}, \vec{AC} = \vec{v}, \vec{AE} = \vec{w}$, ונתון

$$EM = \frac{1}{2}ED \text{ כך ש-} ED \text{ נקודה על } BC, \text{ ו-} M \text{ נקודה על } ED \text{ כך ש-} EM = \frac{1}{2}ED.$$

א. הביעו את $\vec{ED}$ ואת $\vec{AM}$ באמצעות $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

ב. חשבו את $\vec{AM} \cdot \vec{ED}$. האם $AM \perp ED$?

ג. חשבו את אורך AM .

תרגיל 20 ★★☆☆ (T09-023)

נתונים הווקטורים $\vec{u} = (4, 4, 0)$ ו- $\vec{v} = (k, -3, 0)$.

א. מצאו את k שעבורו $\vec{u} \perp \vec{v}$.

ב. עבור k שמצאתם, חשבו את $|\vec{u} + \vec{v}|$ ואת הזווית בין $\vec{u}$ ל- $\vec{u} + \vec{v}$.

תרגיל 21 ★★☆☆ (T09-024)

בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון $A(0, 0, 0), B(6, 0, 0), D(0, 4, 0), A'(0, 0, 5)$.

א. מצאו את שיעורי הקודקודים C' ו- D' , ואת שיעורי M – אמצע המקצוע $B'C'$.

ב. חשבו את הזווית בין הווקטורים $\vec{AC'}$ ו- $\vec{BD'}$ (אלכסוני התיבה).

ג. חשבו את שטח המשולש ABM .

תרגיל 22 ★★☆☆ (T09-025)

בפירמידה $ABCE$ המקצועות AB, AC, AE מאונכים זה לזה. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}, \vec{AC} = \vec{v}, \vec{AE} = \vec{w}$, ונתון

$$EM = \frac{1}{4}ED \text{ כך ש-} ED \text{ נקודה על } BC, \text{ ו-} M \text{ נקודה על } ED \text{ כך ש-} EM = \frac{1}{4}ED.$$

א. הביעו את $\vec{ED}$ ואת $\vec{AM}$ באמצעות $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

ב. חשבו את $\vec{AM} \cdot \vec{ED}$. האם $AM \perp ED$?

ג. חשבו את אורך AM .

תרגיל 23 ★★☆☆ (T09-026)

נתונים הווקטורים $\vec{u} = (-3, -3, 2)$ ו- $\vec{v} = (2, k, 3)$.

א. מצאו את k שעבורו $\vec{u} \perp \vec{v}$.

ב. עבור k שמצאתם, חשבו את $|\vec{u} + \vec{v}|$ ואת הזווית בין $\vec{u}$ ל- $\vec{u} + \vec{v}$.

תרגיל 24 ★★☆☆ (T09-027)

בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון $A(0, 0, 0), B(3, 0, 0), D(0, 4, 0), A'(0, 0, 6)$.

א. מצאו את שיעורי הקודקודים C' ו- D' , ואת שיעורי M – אמצע המקצוע $B'C'$.

ב. חשבו את הזווית בין הווקטורים $\vec{AC'}$ ו- $\vec{BD'}$ (אלכסוני התיבה).

ג. חשבו את שטח המשולש ABM .

תרגיל 25 ★★☆☆ (T09-028)

בפירמידה $ABCE$ המקצועות AB, AC, AE מאונכים זה לזה. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}, \vec{AC} = \vec{v}, \vec{AE} = \vec{w}$, ונתון $|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 2, |\vec{w}| = 3$. D אמצע BC , ו- M נקודה על ED כך ש- $EM = \frac{1}{3}ED$.
 א. הביעו את $\vec{ED}$ ואת $\vec{AM}$ באמצעות $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
 ב. חשבו את $\vec{AM} \cdot \vec{ED}$. האם $AM \perp ED$?
 ג. חשבו את אורך AM .

תרגיל 26 ★★☆☆ (T09-029)

נתונים הווקטורים $\vec{u} = (2, 2, -4)$ ו- $\vec{v} = (-2, 2, k)$.
 א. מצאו את k שעבורו $\vec{u} \perp \vec{v}$.
 ב. עבור k שמצאתם, חשבו את $|\vec{u} + \vec{v}|$ ואת הזווית בין $\vec{u}$ ל- $\vec{u} + \vec{v}$.

תרגיל 27 ★★☆☆ (T09-030)

בפירמידה $ABCE$ המקצועות AB, AC, AE מאונכים זה לזה. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}, \vec{AC} = \vec{v}, \vec{AE} = \vec{w}$, ונתון $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 2, |\vec{w}| = 4$. D אמצע BC , ו- M נקודה על ED כך ש- $EM = \frac{1}{2}ED$.
 א. הביעו את $\vec{ED}$ ואת $\vec{AM}$ באמצעות $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
 ב. חשבו את $\vec{AM} \cdot \vec{ED}$. האם $AM \perp ED$?
 ג. חשבו את אורך AM .

תרגיל 28 ★★☆☆ (T09-031)

נתונים הווקטורים $\vec{u} = (3, -2, 4)$ ו- $\vec{v} = (4, k, 0)$.
 א. מצאו את k שעבורו $\vec{u} \perp \vec{v}$.
 ב. עבור k שמצאתם, חשבו את $|\vec{u} + \vec{v}|$ ואת הזווית בין $\vec{u}$ ל- $\vec{u} + \vec{v}$.

תרגיל 29 ★★☆☆ (T09-032)

בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון $A(0, 0, 0), B(4, 0, 0), D(0, 2, 0), A'(0, 0, 5)$.
 א. מצאו את שיעורי הקודקודים C' ו- D' , ואת שיעורי M – אמצע המקצוע $B'C'$.
 ב. חשבו את הזווית בין הווקטורים $\vec{AC'}$ ו- $\vec{BD'}$ (אלכסוני התיבה).
 ג. חשבו את שטח המשולש ABM .

תרגיל 30 ★★☆☆ (T09-033)

בפירמידה $ABCE$ המקצועות AB, AC, AE מאונכים זה לזה. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}, \vec{AC} = \vec{v}, \vec{AE} = \vec{w}$, ונתון $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 4, |\vec{w}| = 4$. D אמצע BC , ו- M נקודה על ED כך ש- $EM = \frac{1}{2}ED$.
 א. הביעו את $\vec{ED}$ ואת $\vec{AM}$ באמצעות $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
 ב. חשבו את $\vec{AM} \cdot \vec{ED}$. האם $AM \perp ED$?
 ג. חשבו את אורך AM .

תרגיל 31 ★★☆☆ (T09-034)

נתונים הווקטורים $\vec{u} = (-3, 2, 2)$ ו- $\vec{v} = (-4, -2, k)$.
 א. מצאו את k שעבורו $\vec{u} \perp \vec{v}$.
 ב. עבור k שמצאתם, חשבו את $|\vec{u} + \vec{v}|$ ואת הזווית בין $\vec{u}$ ל- $\vec{u} + \vec{v}$.

תרגיל 32 ★★☆☆ (T09-035)

בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון $A(0,0,0)$, $B(3,0,0)$, $D(0,5,0)$, $A'(0,0,6)$.
 א. מצאו את שיעורי הקודקודים C' ו- D' , ואת שיעורי M – אמצע המקצוע $B'C'$.
 ב. חשבו את הזווית בין הווקטורים $\vec{AC'}$ ו- $\vec{BD'}$ (אלכסוני התיבה).
 ג. חשבו את שטח המשולש ABM .

תרגיל 33 ★★☆☆ (T09-036)

בפירמידה $ABCE$ המקצועות AB , AC , AE מאונכים זה לזה. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AC} = \vec{v}$, $\vec{AE} = \vec{w}$, ונתון $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$, $|\vec{w}| = 8$. D אמצע BC , ו- M נקודה על ED כך ש- $EM = \frac{1}{3}ED$.
 א. הביעו את $\vec{ED}$ ואת $\vec{AM}$ באמצעות $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.
 ב. חשבו את $\vec{AM} \cdot \vec{ED}$. האם $AM \perp ED$?
 ג. חשבו את אורך AM .

תרגיל 34 ★★☆☆ (T09-037)

נתונים הווקטורים $\vec{u} = (2, -4, -4)$ ו- $\vec{v} = (4, k, -1)$.
 א. מצאו את k שעבורו $\vec{u} \perp \vec{v}$.
 ב. עבור k שמצאתם, חשבו את $|\vec{u} + \vec{v}|$ ואת הזווית בין $\vec{u}$ ל- $\vec{u} + \vec{v}$.

תרגיל 35 ★★☆☆ (T09-038)

בפירמידה $ABCE$ המקצועות AB , AC , AE מאונכים זה לזה. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AC} = \vec{v}$, $\vec{AE} = \vec{w}$, ונתון $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 6$, $|\vec{w}| = 8$. D אמצע BC , ו- M נקודה על ED כך ש- $EM = \frac{1}{3}ED$.
 א. הביעו את $\vec{ED}$ ואת $\vec{AM}$ באמצעות $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.
 ב. חשבו את $\vec{AM} \cdot \vec{ED}$. האם $AM \perp ED$?
 ג. חשבו את אורך AM .

תרגיל 36 ★★☆☆ (T09-039)

נתונים הווקטורים $\vec{u} = (2, 4, 4)$ ו- $\vec{v} = (k, 3, 3)$.
 א. מצאו את k שעבורו $\vec{u} \perp \vec{v}$.
 ב. עבור k שמצאתם, חשבו את $|\vec{u} + \vec{v}|$ ואת הזווית בין $\vec{u}$ ל- $\vec{u} + \vec{v}$.

תרגיל 37 ★★☆☆ (T09-040)

בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון $A(0,0,0)$, $B(3,0,0)$, $D(0,4,0)$, $A'(0,0,2)$.
 א. מצאו את שיעורי הקודקודים C' ו- D' , ואת שיעורי M – אמצע המקצוע $B'C'$.
 ב. חשבו את הזווית בין הווקטורים $\vec{AC'}$ ו- $\vec{BD'}$ (אלכסוני התיבה).
 ג. חשבו את שטח המשולש ABM .

תרגיל 38 ★★☆☆ (T09-041)

בפירמידה $ABCE$ המקצועות AB , AC , AE מאונכים זה לזה. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AC} = \vec{v}$, $\vec{AE} = \vec{w}$, ונתון $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 2$, $|\vec{w}| = 3$. D אמצע BC , ו- M נקודה על ED כך ש- $EM = \frac{2}{3}ED$.
 א. הביעו את $\vec{ED}$ ואת $\vec{AM}$ באמצעות $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.
 ב. חשבו את $\vec{AM} \cdot \vec{ED}$. האם $AM \perp ED$?
 ג. חשבו את אורך AM .

תרגיל 39 ★★☆☆ (T09-042)

נתונים הווקטורים $\vec{u} = (0, 4, 1)$ ו- $\vec{v} = (0, 2, k)$.

א. מצאו את k שעבורו $\vec{u} \perp \vec{v}$.

ב. עבור k שמצאתם, חשבו את $|\vec{u} + \vec{v}|$ ואת הזווית בין $\vec{u}$ ל- $\vec{u} + \vec{v}$.

תרגיל 40 ★★☆☆ (T09-043)

בפירמידה $ABCE$ המקצועות AB, AC, AE מאונכים זה לזה. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}, \vec{AC} = \vec{v}, \vec{AE} = \vec{w}$, ונתון

$$EM = \frac{1}{2}ED \text{ כך ש-} ED \text{ נקודה על } BC, \text{ ו-} M \text{ נקודה על } ED. |\vec{u}| = 6, |\vec{v}| = 4, |\vec{w}| = 2.$$

א. הביעו את $\vec{ED}$ ואת $\vec{AM}$ באמצעות $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

ב. חשבו את $\vec{AM} \cdot \vec{ED}$. האם $AM \perp ED$?

ג. חשבו את אורך AM .

תרגיל 41 ★★☆☆ (T09-044)

נתונים הווקטורים $\vec{u} = (-3, -2, 4)$ ו- $\vec{v} = (k, -3, 3)$.

א. מצאו את k שעבורו $\vec{u} \perp \vec{v}$.

ב. עבור k שמצאתם, חשבו את $|\vec{u} + \vec{v}|$ ואת הזווית בין $\vec{u}$ ל- $\vec{u} + \vec{v}$.

תרגיל 42 ★★☆☆ (T09-045)

בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון $A(0, 0, 0), B(6, 0, 0), D(0, 5, 0), A'(0, 0, 6)$.

א. מצאו את שיעורי הקודקודים C' ו- D' , ואת שיעורי M – אמצע המקצוע $B'C'$.

ב. חשבו את הזווית בין הווקטורים $\vec{AC'}$ ו- $\vec{BD'}$ (אלכסוני התיבה).

ג. חשבו את שטח המשולש ABM .

תרגיל 43 ★★☆☆ (T09-046)

בפירמידה $ABCE$ המקצועות AB, AC, AE מאונכים זה לזה. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}, \vec{AC} = \vec{v}, \vec{AE} = \vec{w}$, ונתון

$$EM = \frac{1}{2}ED \text{ כך ש-} ED \text{ נקודה על } BC, \text{ ו-} M \text{ נקודה על } ED. |\vec{u}| = 6, |\vec{v}| = 3, |\vec{w}| = 8.$$

א. הביעו את $\vec{ED}$ ואת $\vec{AM}$ באמצעות $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

ב. חשבו את $\vec{AM} \cdot \vec{ED}$. האם $AM \perp ED$?

ג. חשבו את אורך AM .

תרגיל 44 ★★☆☆ (T09-047)

נתונים הווקטורים $\vec{u} = (-4, 2, -1)$ ו- $\vec{v} = (-1, k, -4)$.

א. מצאו את k שעבורו $\vec{u} \perp \vec{v}$.

ב. עבור k שמצאתם, חשבו את $|\vec{u} + \vec{v}|$ ואת הזווית בין $\vec{u}$ ל- $\vec{u} + \vec{v}$.

תרגיל 45 ★★☆☆ (T09-048)

בפירמידה $ABCE$ המקצועות AB, AC, AE מאונכים זה לזה. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}, \vec{AC} = \vec{v}, \vec{AE} = \vec{w}$, ונתון

$$EM = \frac{1}{3}ED \text{ כך ש-} ED \text{ נקודה על } BC, \text{ ו-} M \text{ נקודה על } ED. |\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 6, |\vec{w}| = 6.$$

א. הביעו את $\vec{ED}$ ואת $\vec{AM}$ באמצעות $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

ב. חשבו את $\vec{AM} \cdot \vec{ED}$. האם $AM \perp ED$?

ג. חשבו את אורך AM .

תרגיל 46 ★★☆☆ (T09-049)

נתונים הווקטורים $\vec{u} = (-1, 4, -3)$ ו- $\vec{v} = (k, 3, 1)$.

א. מצאו את k שעבורו $\vec{u} \perp \vec{v}$.

ב. עבור k שמצאתם, חשבו את $|\vec{u} + \vec{v}|$ ואת הזווית בין $\vec{u}$ ל- $\vec{u} + \vec{v}$.

תרגיל 47 ★★☆☆ (T09-050)

בפירמידה $ABCE$ המקצועות AB, AC, AE מאונכים זה לזה. נסמן $\vec{AB} = \vec{u}, \vec{AC} = \vec{v}, \vec{AE} = \vec{w}$, ונתון

$$EM = \frac{1}{4}ED \text{ כך ש-} ED \text{ נקודה על } BC, \text{ ו-} D \text{ אמצע } BC. |\vec{w}| = 6, |\vec{v}| = 2, |\vec{u}| = 2$$

א. הביעו את $\vec{ED}$ ואת $\vec{AM}$ באמצעות $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

ב. חשבו את $\vec{AM} \cdot \vec{ED}$. האם $AM \perp ED$?

ג. חשבו את אורך AM .

4. תשובות סופיות לתרגילים

1. א. $S = 6\sqrt{10}$; ג. $\approx 79.52^\circ$; ב. $C'(6, 4, 6), D'(0, 4, 6), M(6, 2, 6)$.

2. א. $AM = \frac{\sqrt{26}}{3}$; ג. לא מאונכים; ב. $ED = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}, \vec{AM} = \frac{1}{6}\vec{u} + \frac{1}{6}\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w}$.

3. א. $k = -1$; ב. $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{38}, \theta \approx 23.41^\circ$.

4. א. $S = \frac{\sqrt{73}}{2}$; ג. $\approx 43.6^\circ$; ב. $C'(2, 3, 4), D'(0, 3, 4), M(2, \frac{3}{2}, 4)$.

5. א. $AM = \frac{2\sqrt{22}}{3}$; ג. לא מאונכים; ב. $ED = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}, \vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$.

6. א. $k = -4$; ב. $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{74}, \theta \approx 48.1^\circ$.

7. א. $S = \frac{3\sqrt{17}}{2}$; ג. $\approx 67.71^\circ$; ב. $C'(3, 2, 4), D'(0, 2, 4), M(3, 1, 4)$.

8. א. $AM = \frac{7}{3}$; ג. לא מאונכים; ב. $ED = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}, \vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$.

9. א. $k = -6$; ב. $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{77}, \theta \approx 46.86^\circ$.

10. א. $S = \frac{3\sqrt{73}}{2}$; ג. $\approx 100.39^\circ$; ב. $C'(6, 3, 4), D'(0, 3, 4), M(6, \frac{3}{2}, 4)$.

11. א. $AM = \frac{7}{3}$; ג. לא מאונכים; ב. $ED = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}, \vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$.

12. א. $k = 3$; ב. $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{33}, \theta \approx 49.36^\circ$.

13. א. $S = 4\sqrt{5}$; ג. $\approx 70.53^\circ$; ב. $C'(4, 4, 4), D'(0, 4, 4), M(4, 2, 4)$.

14. א. $AM = \frac{13}{8}$; ג. לא מאונכים; ב. $ED = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}, \vec{AM} = \frac{1}{8}\vec{u} + \frac{1}{8}\vec{v} + \frac{3}{4}\vec{w}$.

15. א. $k = 5$; ב. $|\vec{u} + \vec{v}| = 3\sqrt{10}, \theta \approx 43.09^\circ$.

16. א. $S = \frac{5}{2}$; ג. $\approx 58.03^\circ$; ב. $C'(2, 3, 2), D'(0, 3, 2), M(2, \frac{3}{2}, 2)$.

17. א. $AM = \frac{3\sqrt{149}}{8}$; ג. לא מאונכים; ב. $ED = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}, \vec{AM} = \frac{1}{8}\vec{u} + \frac{1}{8}\vec{v} + \frac{3}{4}\vec{w}$.

18. א. $k = -10$; ב. $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{149}, \theta \approx 60.56^\circ$.

19. א. $AM = \frac{\sqrt{61}}{4}$; ג. לא מאונכים; ב. $ED = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}, \vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$.

20. א. $k = 3$; ב. $|\vec{u} + \vec{v}| = 5\sqrt{2}, \theta \approx 36.87^\circ$.

21. א. $S = 3\sqrt{29}$; ג. $\approx 86.28^\circ$; ב. $C'(6, 4, 5), D'(0, 4, 5), M(6, 2, 5)$.

22. א. $AM = \frac{\sqrt{94}}{4}$; ג. לא מאונכים; ב. $ED = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}, \vec{AM} = \frac{1}{8}\vec{u} + \frac{1}{8}\vec{v} + \frac{3}{4}\vec{w}$.

23. א. $k = 0$; ב. $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{35}, \theta \approx 37.55^\circ$.

24. א. $S = 3\sqrt{10}$; ג. $\approx 45.18^\circ$; ב. $C'(3, 4, 6), D'(0, 4, 6), M(3, 2, 6)$.

25. א. $AM = \frac{\sqrt{157}}{6}$; ג. לא מאונכים; ב. $ED = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}, \vec{AM} = \frac{1}{6}\vec{u} + \frac{1}{6}\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w}$.

26. א. $k = 0$; ב. $|\vec{u} + \vec{v}| = 4\sqrt{2}, \theta \approx 30^\circ$.

27. א. $AM = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; ג. לא מאונכים; ב. $ED = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}, \vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$.

- 28.** א. $k = 6$. ב. $|\vec{u} + \vec{v}| = 9$, $\theta \approx 53.25^\circ$.
- 29.** א. $S = 2\sqrt{26}$. ג. $\approx 73.21^\circ$. ב. $C'(4, 2, 5)$, $D'(0, 2, 5)$, $M(4, 1, 5)$.
- 30.** א. $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$, $\vec{ED} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$. ב. $-\frac{11}{2}$. ג. $AM = \frac{\sqrt{21}}{2}$. לא מאונכים.
- 31.** א. $k = -4$. ב. $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{53}$, $\theta \approx 55.5^\circ$.
- 32.** א. $S = \frac{39}{4}$. ג. $\approx 42.02^\circ$. ב. $C'(3, 5, 6)$, $D'(0, 5, 6)$, $M(3, \frac{5}{2}, 6)$.
- 33.** א. $\vec{AM} = \frac{1}{6}\vec{u} + \frac{1}{6}\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w}$, $\vec{ED} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$. ב. $-\frac{499}{12}$. ג. $AM = \frac{\sqrt{1037}}{6}$. לא מאונכים.
- 34.** א. $k = 3$. ב. $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{62}$, $\theta \approx 40.36^\circ$.
- 35.** א. $\vec{AM} = \frac{1}{6}\vec{u} + \frac{1}{6}\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w}$, $\vec{ED} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$. ב. $-\frac{467}{12}$. ג. $AM = \frac{\sqrt{1069}}{6}$. לא מאונכים.
- 36.** א. $k = -12$. ב. $|\vec{u} + \vec{v}| = 3\sqrt{22}$, $\theta \approx 64.76^\circ$.
- 37.** א. $S = 3\sqrt{2}$. ג. $\approx 67.71^\circ$. ב. $C'(3, 4, 2)$, $D'(0, 4, 2)$, $M(3, 2, 2)$.
- 38.** א. $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$, $\vec{ED} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$. ב. $-\frac{5}{3}$. ג. $AM = \frac{\sqrt{17}}{3}$. לא מאונכים.
- 39.** א. $k = -8$. ב. $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{85}$, $\theta \approx 63.43^\circ$.
- 40.** א. $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$, $\vec{ED} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$. ב. $-\frac{9}{2}$. ג. $AM = \frac{\sqrt{17}}{2}$. לא מאונכים.
- 41.** א. $k = 6$. ב. $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{83}$, $\theta \approx 53.76^\circ$.
- 42.** א. $S = \frac{39}{2}$. ג. $\approx 75.06^\circ$. ב. $C'(6, 5, 6)$, $D'(0, 5, 6)$, $M(6, \frac{5}{2}, 6)$.
- 43.** א. $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$, $\vec{ED} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$. ב. $-\frac{211}{8}$. ג. $AM = \frac{\sqrt{301}}{4}$. לא מאונכים.
- 44.** א. $k = -4$. ב. $|\vec{u} + \vec{v}| = 3\sqrt{6}$, $\theta \approx 51.42^\circ$.
- 45.** א. $\vec{AM} = \frac{1}{6}\vec{u} + \frac{1}{6}\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w}$, $\vec{ED} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$. ב. $-\frac{62}{3}$. ג. $AM = \frac{\sqrt{154}}{3}$. לא מאונכים.
- 46.** א. $k = 9$. ב. $|\vec{u} + \vec{v}| = 3\sqrt{13}$, $\theta \approx 61.87^\circ$.
- 47.** א. $\vec{AM} = \frac{1}{8}\vec{u} + \frac{1}{8}\vec{v} + \frac{3}{4}\vec{w}$, $\vec{ED} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$. ב. $-\frac{53}{2}$. ג. $AM = \frac{\sqrt{326}}{4}$. לא מאונכים.

5. שאלות בגרות קודמות בנושא (22)

הקישורים מובילים לקובץ הבחינה הרשמי במאגר משרד החינוך (או לעותק ציבורי כשהקובץ אינו במאגר) ולסרטון פתרון ביוטיוב. השאלות עצמן אינן מועתקות לחוברת. "ראשי" = הנושא המרכזי של השאלה; "משני" = סעיף או רכיב בשאלה.

שנה	מועד	שאלון	שאלה	סוג	בחינה	סרטון פתרון
2026	קיץ מועד א	472	2	ראשי	PDF (רשמי)	עובד לב ארי
2026	קיץ מועד ב	472	2	ראשי	PDF (רשמי)	עובד לב ארי
2026	חורף	472	2	ראשי	PDF (רשמי)	עובד לב ארי
2025	קיץ מועד א	472	2	ראשי	PDF (רשמי)	עובד לב ארי
2025	קיץ מועד ב	472	2	ראשי	PDF (רשמי)	עובד לב ארי
2025	חורף	472	2	ראשי	PDF (רשמי)	—
2024	קיץ מועד א	472	2	ראשי	PDF (רשמי)	עובד לב ארי
2024	קיץ מועד ב	472	2	ראשי	PDF (רשמי)	עובד לב ארי
2024	חורף	472	2	ראשי	PDF (רשמי)	עובד לב ארי
2023	קיץ מועד מיוחד	472	1	ראשי	PDF (עותק)	—
2023	קיץ מועד א	472	1	ראשי	PDF (רשמי)	—
2023	חורף	472	1	ראשי	PDF (רשמי)	—
2022	קיץ מועד א	472	1	ראשי	PDF (רשמי)	—
2022	קיץ מועד ב	472	1	ראשי	PDF (רשמי)	—

2022	קיץ מועד ב	472	3	משני	PDF (רשמי)	עובד לב ארי
2022	חורף	472	1	ראשי	PDF (רשמי)	—
2022	חורף בבצרים	472	1	ראשי	PDF (רשמי)	—
2021	קיץ מועד מיוחד	482 (ניסוי)	2	ראשי	PDF (עותק)	—
2021	קיץ מועד א	482 (ניסוי)	1	ראשי	PDF (עותק)	—
2021	קיץ מועד א	482 (ניסוי)	2	ראשי	PDF (עותק)	—
2021	קיץ מועד ב	482 (ניסוי)	1	ראשי	PDF (עותק)	—
2021	קיץ מועד ב	482 (ניסוי)	2	ראשי	PDF (עותק)	—

התרגילים בחוברת מקוריים (נוצרו בהשראת סגנון הבגרות ואינם העתקה של שאלות משרד החינוך), וכל תשובה נבדקה אוטומטית ב-sympy. סרטוני הפתרון שייכים ליוצריהם ומקושרים בלבד.