

אינדוקציה מתמטית

אינדוקציה הופיעה בעיקר בשאלון 806 הישן ובשאלות הקצרות של 571; כדאי לשלוט בה גם ככלי להוכחת נוסחאות של סדרות.

שאלון 806

שאלון 581

שאלון 571

בחוברת: תקציר תיאוריה ונוסחאות • 3 דוגמאות פתורות • 47 תרגילים מקוריים עם תשובות • 8 שאלות בגרות קודמות בנושא (קישורים).

1. תקציר תיאוריה ונוסחאות

מבנה הוכחה באינדוקציה

- 1. בסיס: בודקים שהטענה נכונה עבור $n = 1$ (או הערך הראשון שנדרש).
- 2. הנחה: מניחים שהטענה נכונה עבור $n = k$.
- 3. צעד: מוכיחים שהטענה נכונה עבור $n = k + 1$, תוך שימוש בהנחה.
- 4. מסקנה: לפי עקרון האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

סוגי טענות נפוצים

- שוויון סכומים: $\sum_{i=1}^n f(i) = g(n)$. בצעד: $\sum_{i=1}^{k+1} f(i) = g(k) + f(k+1)$ ומראים שזה שווה $g(k+1)$.
- התחלקות: למשל $7^n - 1$ מתחלק ב-6. בצעד כותבים $7^{k+1} - 1 = 7(7^k - 1) + 6$.
- נוסחה לסדרת נסיגה: מציבים את ההנחה בכלל הנסיגה.

טיפים

- הוציאו גורם משותף לפני שפותחים סוגריים – החישוב קצר יותר.
- כתבו במפורש מה צריך להוכיח עבור $n = k + 1$ לפני שמתחילים.

2. דוגמאות פתורות

דוגמה 1 ★★☆☆

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

פתרון:

1. בדיקה עבור $n = 1$: אגף שמאל 3, אגף ימין 3 – שווים.
2. הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור n .
3. עבור $n + 1$: אגף שמאל $(n+1)(n+3)$, $= \frac{n(n+1)(2n+7)}{6} + (n+1)(n+3)$.
4. לאחר פישוט מתקבל $\frac{(n+1)(n+2)(2n+9)}{6}$, שהוא אגף ימין עבור $n + 1$. לכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הטענה נכונה לכל n טבעי (הוכחה באינדוקציה)

דוגמה 2 ★★☆☆

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\sum_{k=1}^n k \cdot 2^k = 2(2^n n - 2^n + 1)$$

פתרון:

1. בדיקה עבור $n = 1$: אגף שמאל 2, אגף ימין 2 – שווים.
2. הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור n .
3. עבור $n + 1$: אגף שמאל $(n+1)2^{n+1} + 2(2^n n - 2^n + 1)$.
4. לאחר פישוט מתקבל $2(2 \cdot 2^n n + 1)$, שהוא אגף ימין עבור $n + 1$. לכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

תשובה: הטענה נכונה לכל n טבעי (הוכחה באינדוקציה)

דוגמה 3 ★★☆☆

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $6^{2n} - 1$ מתחלק ב-35 ללא שארית.

פתרון:

1. עבור $n = 1$: 35 מתחלק ב-35.
2. נניח ש- $6^{2n} - 1 = 35m$ עבור m שלם.
3. עבור $n + 1$: $6^{2n+2} - 1 = 36 \cdot (6^{2n} - 1) + 35 = 36 \cdot 35m + 35$.
4. שני המחוברים מתחלקים ב-35 (כי $35 = 35 \cdot 1$), ולכן הטענה נכונה לכל n .

תשובה: הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)

3. תרגילים

רמת קושי: ★ בסיסי • ★★ בינוני • ★★★ מתקדם. התשובות הסופיות בסוף החוברת; פתרון מלא ורמזים לכל תרגיל זמינים באתר.

תרגיל 1 ★★★ (T03-003)

סדרה מוגדרת: $a_{n+1} = 3a_n + 2, a_1 = 2$.
הוכיחו באינדוקציה כי $a_n = 3^n - 1$ לכל n טבעי.

תרגיל 2 ★★★ (T03-004)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

תרגיל 3 ★★★ (T03-005)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $8^{2n} - 1$ מתחלק ב-63 ללא שארית.

תרגיל 4 ★★★ (T03-006)

סדרה מוגדרת: $a_{n+1} = 3a_n + 1, a_1 = 3$.
הוכיחו באינדוקציה כי $a_n = \frac{7 \cdot 3^n}{6} - \frac{1}{2}$ לכל n טבעי.

תרגיל 5 ★★★ (T03-007)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \dots + n(n+3) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$$

תרגיל 6 ★★★ (T03-008)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $5^{2n} - 1$ מתחלק ב-4 ללא שארית.

תרגיל 7 ★★★ (T03-009)

סדרה מוגדרת: $a_{n+1} = 3a_n - 1, a_1 = 2$.
הוכיחו באינדוקציה כי $a_n = \frac{3^n}{2} + \frac{1}{2}$ לכל n טבעי.

תרגיל 8 ★★★ (T03-011)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $11^{n+1} - 1$ מתחלק ב-10 ללא שארית.

תרגיל 9 ★★★ (T03-012)

סדרה מוגדרת: $a_{n+1} = 3a_n - 1, a_1 = 3$.
הוכיחו באינדוקציה כי $a_n = \frac{5 \cdot 3^n}{6} + \frac{1}{2}$ לכל n טבעי.

תרגיל 10 ★★☆☆ (T03-013)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

תרגיל 11 ★★☆☆ (T03-014)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $4^{n+1} - 1$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

תרגיל 12 ★★☆☆ (T03-015)

סדרה מוגדרת: $a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n + 2$.
הוכיחו באינדוקציה כי $a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 1$ לכל n טבעי.

תרגיל 13 ★★☆☆ (T03-016)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $3^{2n} - 1$ מתחלק ב-8 ללא שארית.

תרגיל 14 ★★☆☆ (T03-017)

סדרה מוגדרת: $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n - 1$.
הוכיחו באינדוקציה כי $a_n = \frac{3^n}{6} + \frac{1}{2}$ לכל n טבעי.

תרגיל 15 ★★☆☆ (T03-018)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $5^{2n+1} - 1$ מתחלק ב-4 ללא שארית.

תרגיל 16 ★★☆☆ (T03-019)

סדרה מוגדרת: $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 2$.
הוכיחו באינדוקציה כי $a_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 2$ לכל n טבעי.

תרגיל 17 ★★☆☆ (T03-020)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

תרגיל 18 ★★☆☆ (T03-021)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $7^{2n} - 1$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

תרגיל 19 ★★☆☆ (T03-022)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $7^n - 1$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

תרגיל 20 ★★☆☆ (T03-023)

סדרה מוגדרת: $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 1$.
הוכיחו באינדוקציה כי $a_n = 1$ לכל n טבעי.

תרגיל 21 ★★☆☆ (T03-024)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $7^{2n+1} - 1$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

תרגיל 22 ★★☆☆ (T03-025)

סדרה מוגדרת: $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n - 1$.
הוכיחו באינדוקציה כי $a_n = 2^{n-1} + 1$ לכל n טבעי.

תרגיל 23 ★★☆☆ (T03-026)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $4^{2n+1} - 1$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

תרגיל 24 ★★☆☆ (T03-027)

סדרה מוגדרת: $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n + 1$.
הוכיחו באינדוקציה כי $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ לכל n טבעי.

תרגיל 25 ★★☆☆ (T03-028)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $7^{n+1} - 1$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

תרגיל 26 ★★☆☆ (T03-029)

סדרה מוגדרת: $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 1$.
הוכיחו באינדוקציה כי $a_n = 2^{n+1} - 1$ לכל n טבעי.

תרגיל 27 ★★☆☆ (T03-030)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $9^{n+1} - 1$ מתחלק ב-8 ללא שארית.

תרגיל 28 ★★☆☆ (T03-031)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\sum_{k=1}^n k \cdot 3^k = \frac{3(2 \cdot 3^n n - 3^n + 1)}{4}$$

תרגיל 29 ★★☆☆ (T03-032)

סדרה מוגדרת: $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n + 2$.
הוכיחו באינדוקציה כי $a_n = 2 \cdot 2^n - 2$ לכל n טבעי.

תרגיל 30 ★★☆☆ (T03-033)הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

תרגיל 31 ★★☆☆ (T03-034)הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $11^n - 1$ מתחלק ב-10 ללא שארית.**תרגיל 32** ★★☆☆ (T03-035)סדרה מוגדרת: $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2$.הוכיחו באינדוקציה כי $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$ לכל n טבעי.**תרגיל 33** ★★☆☆ (T03-036)הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $9^{2n} - 1$ מתחלק ב-8 ללא שארית.**תרגיל 34** ★★☆☆ (T03-037)סדרה מוגדרת: $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n - 1$.הוכיחו באינדוקציה כי $a_n = 2^n + 1$ לכל n טבעי.**תרגיל 35** ★★☆☆ (T03-038)הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $5^{n+1} - 1$ מתחלק ב-4 ללא שארית.**תרגיל 36** ★★☆☆ (T03-039)הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

תרגיל 37 ★★☆☆ (T03-040)הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $11^{2n+1} - 1$ מתחלק ב-10 ללא שארית.**תרגיל 38** ★★☆☆ (T03-041)סדרה מוגדרת: $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n + 1$.הוכיחו באינדוקציה כי $a_n = \frac{5 \cdot 3^n}{6} - \frac{1}{2}$ לכל n טבעי.**תרגיל 39** ★★☆☆ (T03-042)סדרה מוגדרת: $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 2$.הוכיחו באינדוקציה כי $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$ לכל n טבעי.

תרגיל 40 ★★☆☆ (T03-043)

סדרה מוגדרת: $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$.
הוכיחו באינדוקציה כי $a_n = 2^n - 1$ לכל n טבעי.

תרגיל 41 ★★☆☆ (T03-044)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $5^n - 1$ מתחלק ב-4 ללא שארית.

תרגיל 42 ★★☆☆ (T03-045)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $9^{2n+1} - 1$ מתחלק ב-8 ללא שארית.

תרגיל 43 ★★☆☆ (T03-046)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $11^{2n} - 1$ מתחלק ב-10 ללא שארית.

תרגיל 44 ★★☆☆ (T03-047)

סדרה מוגדרת: $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 1$.
הוכיחו באינדוקציה כי $a_n = \frac{3^n}{2} - \frac{1}{2}$ לכל n טבעי.

תרגיל 45 ★★☆☆ (T03-048)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $4^{2n} - 1$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

תרגיל 46 ★★☆☆ (T03-049)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $9^n - 1$ מתחלק ב-8 ללא שארית.

תרגיל 47 ★★☆☆ (T03-050)

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $4^n - 1$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

4. תשובות סופיות לתרגילים

1. הנוסחה נכונה לכל n
2. הטענה נכונה לכל n טבעי (הוכחה באינדוקציה)
3. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
4. הנוסחה נכונה לכל n
5. הטענה נכונה לכל n טבעי (הוכחה באינדוקציה)
6. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
7. הנוסחה נכונה לכל n
8. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
9. הנוסחה נכונה לכל n
10. הטענה נכונה לכל n טבעי (הוכחה באינדוקציה)
11. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
12. הנוסחה נכונה לכל n
13. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)

14. הנוסחה נכונה לכל n
15. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
16. הנוסחה נכונה לכל n
17. הטענה נכונה לכל n טבעי (הוכחה באינדוקציה)
18. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
19. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
20. הנוסחה נכונה לכל n
21. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
22. הנוסחה נכונה לכל n
23. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
24. הנוסחה נכונה לכל n
25. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
26. הנוסחה נכונה לכל n
27. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
28. הטענה נכונה לכל n טבעי (הוכחה באינדוקציה)
29. הנוסחה נכונה לכל n
30. הטענה נכונה לכל n טבעי (הוכחה באינדוקציה)
31. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
32. הנוסחה נכונה לכל n
33. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
34. הנוסחה נכונה לכל n
35. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
36. הטענה נכונה לכל n טבעי (הוכחה באינדוקציה)
37. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
38. הנוסחה נכונה לכל n
39. הנוסחה נכונה לכל n
40. הנוסחה נכונה לכל n
41. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
42. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
43. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
44. הנוסחה נכונה לכל n
45. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
46. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)
47. הטענה נכונה (הוכחה באינדוקציה)

5. שאלות בגרות קודמות בנושא (8)

הקישורים מובילים לקובץ הבחינה הרשמי במאגר משרד החינוך (או לעותק ציבורי כשהקובץ אינו במאגר) ולסרטון פתרון ביוטיוב. השאלות עצמן אינן מועתקות לחוברת. "ראשי" = הנושא המרכזי של השאלה; "משני" = סעיף או רכיב בשאלה.

שנה	מועד	שאלון	שאלה	סוג	בחינה	סרטון פתרון
2021	חורף	571 (ניסוי)	1	משני	PDF (עותק)	עובד לב ארי
2020	קיץ מועד א	571 (ניסוי)	1	משני	PDF (עותק)	עובד לב ארי

2013	חורף	806	2	ראשי	PDF (רשמי)	–
2012	קיץ מועד א	806	2	ראשי	PDF (רשמי)	–
2012	קיץ מועד ב	806	2	ראשי	PDF (רשמי)	–
2012	חורף	806	2	משני	PDF (רשמי)	עובד לב ארי
2011	קיץ מועד ב	806	2	ראשי	PDF (רשמי)	–
2011	חורף	806	2	ראשי	PDF (רשמי)	–

התרגילים בחוברת מקוריים (נוצרו בהשראת סגנון הבגרות ואינם העתקה של שאלות משרד החינוך), וכל תשובה נבדקה אוטומטית ב-sympy. סרטוני הפתרון שייכים ליוצריהם ומקושרים בלבד.