

גדילה ודעיכה

גדילה ודעיכה – חלק מהפרק השני של השאלון השני; מופיעה בעיקר כסעיף בתוך שאלה.

שאלון 807

שאלון 582

שאלון 572

בחוברת: תקציר תיאוריה ונוסחאות • 3 דוגמאות פתורות • 47 תרגילים מקוריים עם תשובות • 2 שאלות בגרות קודמות בנושא (קישורים).

1. תקציר תיאוריה ונוסחאות

מודל מעריכי

- $M(t) = M_0 q^t$: M_0 – כמות התחלתית, q – מקדם השינוי ליחידת זמן. גדילה: $q > 1$; דעיכה: $0 < q < 1$.
- שינוי של $p\%$ ליחידת זמן: $q = 1 \pm \frac{p}{100}$.
- צורה רציפה: $M(t) = M_0 e^{kt}$ ($k > 0$ גדילה, $k < 0$ דעיכה).

חישובים אופייניים

- שתי מדידות: מחלקים $\frac{M(t_2)}{M(t_1)} = q^{t_2 - t_1}$.
- זמן מחצית חיים T : $M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$.
- מציאת זמן: $q^t = c \Rightarrow t = \frac{\log c}{\log q}$.
- קצב השינוי הרגעי – גזרת: $(M_0 e^{kt})' = k M_0 e^{kt}$.

2. דוגמאות פתורות

דוגמה 1 ★★

אוכלוסייה מונה 2000 פרטים וגדלה ב-4% בכל שנה.

א. כמה פרטים יהיו בה בעוד 12 שנים?

ב. כעבור כמה שנים תוכפל האוכלוסייה?

פתרון:

$$1. M(t) = 2000 \cdot \frac{26}{25}^t \text{ (מקדם גדילה } q = 1 + \frac{4}{100})$$

$$2. M(12) = 2000 \cdot \frac{26}{25}^{12} \approx 3202.1$$

$$3. \frac{26}{25}^t = 2 \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log \frac{26}{25}} \approx 17.67 \text{ שנים.}$$

תשובה: א. ≈ 3202.1 ; ב. $t \approx 17.67$ שנים

דוגמה 2 ★★☆☆

כמות של חומר דועכת באופן מעריכי, $M(t) = M_0 q^t$ (בשעות). לאחר 1 שעות נמדדו 100 גרם, ולאחר 3 שעות נמדדו 25 גרם.

א. מצאו את q ואת M_0 .

ב. בכמה אחוזים קטנה הכמות בכל שעה?

פתרון:

$$1. \frac{M(3)}{M(1)} = q^2 = \frac{1}{4} \text{ , לכן } q = \frac{1}{2}$$

$$2. M_0 = \frac{100}{\frac{1}{2}} = 200$$

3. שינוי לשעה: 50%

תשובה: א. $M_0 = 200$, $q = \frac{1}{2}$; ב. 50%

דוגמה 3 ★★☆☆

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 8 שנים. בתחילה היו 640 גרם.

א. כמה גרם יישארו לאחר 24 שנים?

ב. לאחר כמה שנים יישארו 20% מהכמות ההתחלתית?

פתרון:

$$1. M(t) = 640 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/8}$$

$$2. M(24) = 80 \approx 80 \text{ גרם.}$$

$$3. \left(\frac{1}{2}\right)^{t/8} = 0.2, \frac{\ln(5)}{\ln 2} \approx 18.58, t = 8 \cdot \frac{\ln(5)}{\ln 2} \approx 18.58 \text{ שנים.}$$

תשובה: א. ≈ 80 גרם; ב. ≈ 18.58 שנים

3. תרגילים

רמת קושי: ★ בסיסי • ★★ בינוני • ★★★ מתקדם. התשובות הסופיות בסוף החוברת; פתרון מלא ורמזים לכל תרגיל זמינים באתר.

תרגיל 1 ★★☆☆ (T15-004)

באגם א יש 2000 דגים, והמספר גדל פי $\frac{11}{10}$ בכל שנה. באגם ב יש 6000 דגים, והמספר משתנה פי $\frac{9}{10}$ בכל שנה. כעבור כמה שנים יהיה מספר הדגים בשני האגמים שווה?

תרגיל 2 ★★☆☆ (T15-005)

מספר החיידקים בתרבית נתון על ידי $N(t) = 500e^{\frac{1}{5}t}$ (בשעות).

א. כמה חיידקים יהיו לאחר 20 שעות?

ב. מה קצב השינוי של מספר החיידקים ברגע $t = 20$?

תרגיל 3 ★★☆☆ (T15-006)

אוכלוסייה מונה 12000 פרטים וגדלה ב-5% בכל שנה.
 א. כמה פרטים יהיו בה בעוד 5 שנים?
 ב. כעבור כמה שנים תוכפל האוכלוסייה?

תרגיל 4 ★★☆☆ (T15-007)

כמות של חומר גדלה באופן מעריכי, $M(t) = M_0 q^t$ (בשעות). לאחר 3 שעות נמדדו 3375 גרם, ולאחר 6 שעות נמדדו $\frac{91125}{8}$ גרם.
 א. מצאו את q ואת M_0 .
 ב. בכמה אחוזים גדלה הכמות בכל שעה?

תרגיל 5 ★★☆☆ (T15-008)

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 20 שנים. בתחילה היו 80 גרם.
 א. כמה גרם יישארו לאחר 80 שנים?
 ב. לאחר כמה שנים יישארו 40% מהכמות ההתחלתית?

תרגיל 6 ★★☆☆ (T15-009)

באגם א יש 300 דגים, והמספר גדל פי $\frac{3}{2}$ בכל שנה. באגם ב יש 2700 דגים, והמספר משתנה פי $\frac{3}{4}$ בכל שנה.
 כעבור כמה שנים יהיה מספר הדגים בשני האגמים שווה?

תרגיל 7 ★★☆☆ (T15-010)

מספר החיידקים בתרבית נתון על ידי $N(t) = 100e^{-\frac{1}{10}t}$ (בשעות).
 א. כמה חיידקים יהיו לאחר 20 שעות?
 ב. מה קצב השינוי של מספר החיידקים ברגע $t = 20$?

תרגיל 8 ★★☆☆ (T15-011)

אוכלוסייה מונה 50000 פרטים וגדלה ב-12% בכל שנה.
 א. כמה פרטים יהיו בה בעוד 15 שנים?
 ב. כעבור כמה שנים תוכפל האוכלוסייה?

תרגיל 9 ★★☆☆ (T15-012)

כמות של חומר גדלה באופן מעריכי, $M(t) = M_0 q^t$ (בשעות). לאחר 2 שעות נמדדו 3200 גרם, ולאחר 5 שעות נמדדו 25600 גרם.
 א. מצאו את q ואת M_0 .
 ב. בכמה אחוזים גדלה הכמות בכל שעה?

תרגיל 10 ★★☆☆ (T15-013)

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 2 שנים. בתחילה היו 100 גרם.
 א. כמה גרם יישארו לאחר 4 שנים?
 ב. לאחר כמה שנים יישארו 10% מהכמות ההתחלתית?

תרגיל 11 ★★☆☆ (T15-014)

באגם א יש 1000 דגים, והמספר גדל פי $\frac{3}{2}$ בכל שנה. באגם ב יש 4000 דגים, והמספר משתנה פי $\frac{3}{4}$ בכל שנה. כעבור כמה שנים יהיה מספר הדגים בשני האגמים שווה?

תרגיל 12 ★★☆☆ (T15-015)

מספר החיידקים בתרבית נתון על ידי $N(t) = 100e^{\frac{1}{20}t}$ (בשעות).
 א. כמה חיידקים יהיו לאחר 15 שעות?
 ב. מה קצב השינוי של מספר החיידקים ברגע $t = 15$?

תרגיל 13 ★★☆☆ (T15-016)

אוכלוסייה מונה 5000 פרטים וגדלה ב-8% בכל שנה.
 א. כמה פרטים יהיו בה בעוד 5 שנים?
 ב. כעבור כמה שנים תוכפל האוכלוסייה?

תרגיל 14 ★★☆☆ (T15-017)

כמות של חומר דועכת באופן מעריכי, $M(t) = M_0 q^t$ (בשעות). לאחר 1 שעות נמדדו 160 גרם, ולאחר 3 שעות נמדדו $\frac{512}{5}$ גרם.
 א. מצאו את q ואת M_0 .
 ב. בכמה אחוזים קטנה הכמות בכל שעה?

תרגיל 15 ★★☆☆ (T15-018)

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 12 שנים. בתחילה היו 100 גרם.
 א. כמה גרם יישארו לאחר 18 שנים?
 ב. לאחר כמה שנים יישארו 25% מהכמות ההתחלתית?

תרגיל 16 ★★☆☆ (T15-019)

באגם א יש 2000 דגים, והמספר גדל פי $\frac{3}{2}$ בכל שנה. באגם ב יש 6000 דגים, והמספר משתנה פי $\frac{3}{4}$ בכל שנה. כעבור כמה שנים יהיה מספר הדגים בשני האגמים שווה?

תרגיל 17 ★★☆☆ (T15-020)

מספר החיידקים בתרבית נתון על ידי $N(t) = 500e^{\frac{1}{10}t}$ (בשעות).
 א. כמה חיידקים יהיו לאחר 20 שעות?
 ב. מה קצב השינוי של מספר החיידקים ברגע $t = 20$?

תרגיל 18 ★★☆☆ (T15-021)

אוכלוסייה מונה 12000 פרטים וגדלה ב-6% בכל שנה.
 א. כמה פרטים יהיו בה בעוד 8 שנים?
 ב. כעבור כמה שנים תוכפל האוכלוסייה?

תרגיל 19 ★★☆☆ (T15-022)

כמות של חומר דועכת באופן מעריכי, $M(t) = M_0 q^t$ (בשעות). לאחר 2 שעות נמדדו 640 גרם, ולאחר 4 שעות נמדדו $\frac{2048}{5}$ גרם.
 א. מצאו את q ואת M_0 .
 ב. בכמה אחוזים קטנה הכמות בכל שעה?

תרגיל 20 ★★☆☆ (T15-023)

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 10 שנים. בתחילה היו 80 גרם.
 א. כמה גרם יישארו לאחר 20 שנים?
 ב. לאחר כמה שנים יישארו 40% מהכמות ההתחלתית?

תרגיל 21 ★★☆☆ (T15-024)

באגם א יש 500 דגים, והמספר גדל פי 2 בכל שנה. באגם ב יש 2000 דגים, והמספר משתנה פי $\frac{1}{2}$ בכל שנה.
 כעבור כמה שנים יהיה מספר הדגים בשני האגמים שווה?

תרגיל 22 ★★☆☆ (T15-025)

מספר החיידקים בתרבית נתון על ידי $N(t) = 1000e^{\frac{1}{20}t}$ (בשעות).
 א. כמה חיידקים יהיו לאחר 20 שעות?
 ב. מה קצב השינוי של מספר החיידקים ברגע $t = 20$?

תרגיל 23 ★★☆☆ (T15-026)

אוכלוסייה מונה 1000 פרטים וגדלה ב-5% בכל שנה.
 א. כמה פרטים יהיו בה בעוד 15 שנים?
 ב. כעבור כמה שנים תוכפל האוכלוסייה?

תרגיל 24 ★★☆☆ (T15-027)

כמות של חומר גדלה באופן מעריכי, $M(t) = M_0 q^t$ (בשעות). לאחר 2 שעות נמדדו 1152 גרם, ולאחר 4 שעות נמדדו $\frac{41472}{25}$ גרם.
 א. מצאו את q ואת M_0 .
 ב. בכמה אחוזים גדלה הכמות בכל שעה?

תרגיל 25 ★★☆☆ (T15-028)

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 5 שנים. בתחילה היו 80 גרם.
 א. כמה גרם יישארו לאחר 10 שנים?
 ב. לאחר כמה שנים יישארו 40% מהכמות ההתחלתית?

תרגיל 26 ★★☆☆ (T15-029)

מספר החיידקים בתרבית נתון על ידי $N(t) = 500e^{-\frac{1}{10}t}$ (בשעות).
 א. כמה חיידקים יהיו לאחר 15 שעות?
 ב. מה קצב השינוי של מספר החיידקים ברגע $t = 15$?

תרגיל 27 ★★☆☆ (T15-030)

אוכלוסייה מונה 50000 פרטים וגדלה ב-6% בכל שנה.
 א. כמה פרטים יהיו בה בעוד 12 שנים?
 ב. כעבור כמה שנים תוכפל האוכלוסייה?

תרגיל 28 ★★☆☆ (T15-031)

כמות של חומר דועכת באופן מעריכי, $M(t) = M_0 q^t$ (בשעות). לאחר 3 שעות נמדדו $\frac{2048}{5}$ גרם, ולאחר 6 שעות נמדדו $\frac{131072}{625}$ גרם.
 א. מצאו את q ואת M_0 .
 ב. בכמה אחוזים קטנה הכמות בכל שעה?

תרגיל 29 ★★☆☆ (T15-032)

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 3 שנים. בתחילה היו 160 גרם.
 א. כמה גרם יישארו לאחר 9 שנים?
 ב. לאחר כמה שנים יישארו 20% מהכמות ההתחלתית?

תרגיל 30 ★★☆☆ (T15-033)

באגם א יש 500 דגים, והמספר גדל פי $\frac{3}{2}$ בכל שנה. באגם ב יש 2000 דגים, והמספר משתנה פי $\frac{3}{4}$ בכל שנה.
 כעבור כמה שנים יהיה מספר הדגים בשני האגמים שווה?

תרגיל 31 ★★☆☆ (T15-034)

מספר החיידקים בתרבית נתון על ידי $N(t) = 200e^{\frac{1}{10}t}$ (בשעות).
 א. כמה חיידקים יהיו לאחר 15 שעות?
 ב. מה קצב השינוי של מספר החיידקים ברגע $t = 15$?

תרגיל 32 ★★☆☆ (T15-035)

אוכלוסייה מונה 12000 פרטים וגדלה ב-2% בכל שנה.
 א. כמה פרטים יהיו בה בעוד 12 שנים?
 ב. כעבור כמה שנים תוכפל האוכלוסייה?

תרגיל 33 ★★☆☆ (T15-036)

כמות של חומר גדלה באופן מעריכי, $M(t) = M_0 q^t$ (בשעות). לאחר 2 שעות נמדדו 4000 גרם, ולאחר 4 שעות נמדדו 16000 גרם.
 א. מצאו את q ואת M_0 .
 ב. בכמה אחוזים גדלה הכמות בכל שעה?

תרגיל 34 ★★☆☆ (T15-037)

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 12 שנים. בתחילה היו 100 גרם.
 א. כמה גרם יישארו לאחר 24 שנים?
 ב. לאחר כמה שנים יישארו 10% מהכמות ההתחלתית?

תרגיל 35 ★★☆☆ (T15-038)

מספר החיידקים בתרבית נתון על ידי $N(t) = 1000e^{\frac{1}{10}t}$ (בשעות).
 א. כמה חיידקים יהיו לאחר 20 שעות?
 ב. מה קצב השינוי של מספר החיידקים ברגע $t = 20$?

תרגיל 36 ★★☆☆ (T15-039)

אוכלוסייה מונה 1000 פרטים וגדלה ב-2% בכל שנה.
 א. כמה פרטים יהיו בה בעוד 15 שנים?
 ב. כעבור כמה שנים תוכפל האוכלוסייה?

תרגיל 37 ★★☆☆ (T15-040)

כמות של חומר גדלה באופן מעריכי, $M(t) = M_0 q^t$ (בשעות). לאחר 2 שעות נמדדו 1800 גרם, ולאחר 5 שעות נמדדו 48600 גרם.
 א. מצאו את q ואת M_0 .
 ב. בכמה אחוזים גדלה הכמות בכל שעה?

תרגיל 38 ★★☆☆ (T15-041)

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 3 שנים. בתחילה היו 100 גרם.
 א. כמה גרם יישארו לאחר 12 שנים?
 ב. לאחר כמה שנים יישארו 20% מהכמות ההתחלתית?

תרגיל 39 ★★☆☆ (T15-042)

באגם א יש 300 דגים, והמספר גדל פי 2 בכל שנה. באגם ב יש 2700 דגים, והמספר משתנה פי $\frac{1}{2}$ בכל שנה.
 כעבור כמה שנים יהיה מספר הדגים בשני האגמים שווה?

תרגיל 40 ★★☆☆ (T15-043)

מספר החיידקים בתרבית נתון על ידי $N(t) = 500e^{\frac{3}{10}t}$ (בשעות).
 א. כמה חיידקים יהיו לאחר 20 שעות?
 ב. מה קצב השינוי של מספר החיידקים ברגע $t = 20$?

תרגיל 41 ★★☆☆ (T15-044)

אוכלוסייה מונה 12000 פרטים וגדלה ב-5% בכל שנה.
 א. כמה פרטים יהיו בה בעוד 15 שנים?
 ב. כעבור כמה שנים תוכפל האוכלוסייה?

תרגיל 42 ★★☆☆ (T15-045)

כמות של חומר גדלה באופן מעריכי, $M(t) = M_0 q^t$ (בשעות). לאחר 1 שעות נמדדו 240 גרם, ולאחר 3 שעות נמדדו $\frac{1728}{5}$ גרם.
 א. מצאו את q ואת M_0 .
 ב. בכמה אחוזים גדלה הכמות בכל שעה?

תרגיל 43 ★★☆☆ (T15-046)

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 3 שנים. בתחילה היו 80 גרם.
 א. כמה גרם יישארו לאחר 6 שנים?
 ב. לאחר כמה שנים יישארו 20% מהכמות ההתחלתית?

תרגיל 44 ★★☆☆ (T15-047)

באגם א יש 500 דגים, והמספר גדל פי $\frac{11}{10}$ בכל שנה. באגם ב יש 2000 דגים, והמספר משתנה פי $\frac{9}{10}$ בכל שנה.
 כעבור כמה שנים יהיה מספר הדגים בשני האגמים שווה?

תרגיל 45 ★★☆☆ (T15-048)

מספר החיידקים בתרבית נתון על ידי $N(t) = 100e^{\frac{1}{5}t}$ (בשעות).
 א. כמה חיידקים יהיו לאחר 10 שעות?
 ב. מה קצב השינוי של מספר החיידקים ברגע $t = 10$?

תרגיל 46 ★★☆☆ (T15-049)

אוכלוסייה מונה 5000 פרטים וגדלה ב-10% בכל שנה.
 א. כמה פרטים יהיו בה בעוד 15 שנים?
 ב. כעבור כמה שנים תוכפל האוכלוסייה?

תרגיל 47 ★★☆☆ (T15-050)

כמות של חומר דועכת באופן מעריכי, $M(t) = M_0 q^t$ (בשעות). לאחר 2 שעות נמדדו 250 גרם, ולאחר 5 שעות נמדדו $\frac{125}{4}$ גרם.
 א. מצאו את q ואת M_0 .
 ב. בכמה אחוזים קטנה הכמות בכל שעה?

4. תשובות סופיות לתרגילים

1. $t \approx 5.47$ שנים
2. א. ≈ 27299.08 ; ב. ≈ 5459.82 לשעה
3. א. ≈ 15315.4 ; ב. $t \approx 14.21$ שנים
4. א. $M_0 = 1000$, $q = \frac{3}{2}$; ב. 50%
5. א. 5 גרם; ב. ≈ 26.44 שנים
6. $t \approx 3.17$ שנים
7. א. ≈ 13.53 ; ב. ≈ -1.35 לשעה
8. א. ≈ 273678.3 ; ב. $t \approx 6.12$ שנים
9. א. $M_0 = 800$, $q = 2$; ב. 100%
10. א. ≈ 25 גרם; ב. ≈ 6.64 שנים
11. $t \approx 2$ שנים
12. א. ≈ 211.7 ; ב. ≈ 10.59 לשעה
13. א. ≈ 7346.6 ; ב. $t \approx 9.01$ שנים
14. א. $M_0 = 200$, $q = \frac{4}{5}$; ב. 20%

- 15.** א. $35.36 \approx$ גרם; ב. $24 \approx$ שנים
- 16.** $t \approx 1.58$ שנים
- 17.** א. $3694.53 \approx$; ב. $369.45 \approx$ לשעה
- 18.** א. $19126.2 \approx$; ב. $t \approx 11.9$ שנים
- 19.** א. $M_0 = 1000$, $q = \frac{4}{5}$; ב. 20%
- 20.** א. $20 \approx$ גרם; ב. $13.22 \approx$ שנים
- 21.** $t \approx 1$ שנים
- 22.** א. $2718.28 \approx$; ב. $135.91 \approx$ לשעה
- 23.** א. $2078.9 \approx$; ב. $t \approx 14.21$ שנים
- 24.** א. $M_0 = 800$, $q = \frac{6}{5}$; ב. 20%
- 25.** א. $20 \approx$ גרם; ב. $6.61 \approx$ שנים
- 26.** א. $111.57 \approx$; ב. $-11.16 \approx$ לשעה
- 27.** א. $100609.8 \approx$; ב. $t \approx 11.9$ שנים
- 28.** א. $M_0 = 800$, $q = \frac{4}{5}$; ב. 20%
- 29.** א. $20 \approx$ גרם; ב. $6.97 \approx$ שנים
- 30.** $t \approx 2$ שנים
- 31.** א. $896.34 \approx$; ב. $89.63 \approx$ לשעה
- 32.** א. $15218.9 \approx$; ב. $t \approx 35$ שנים
- 33.** א. $M_0 = 1000$, $q = 2$; ב. 100%
- 34.** א. $25 \approx$ גרם; ב. $39.86 \approx$ שנים
- 35.** א. $7389.06 \approx$; ב. $738.91 \approx$ לשעה
- 36.** א. $1345.9 \approx$; ב. $t \approx 35$ שנים
- 37.** א. $M_0 = 200$, $q = 3$; ב. 200%
- 38.** א. $6.25 \approx$ גרם; ב. $6.97 \approx$ שנים
- 39.** $t \approx 1.58$ שנים
- 40.** א. $201714.4 \approx$; ב. $60514.32 \approx$ לשעה
- 41.** א. $24947.1 \approx$; ב. $t \approx 14.21$ שנים
- 42.** א. $M_0 = 200$, $q = \frac{6}{5}$; ב. 20%
- 43.** א. $20 \approx$ גרם; ב. $6.97 \approx$ שנים
- 44.** $t \approx 6.91$ שנים
- 45.** א. $738.91 \approx$; ב. $147.78 \approx$ לשעה
- 46.** א. $20886.2 \approx$; ב. $t \approx 7.27$ שנים
- 47.** א. $M_0 = 1000$, $q = \frac{1}{2}$; ב. 50%

5. שאלות בגרות קודמות בנושא (2)

הקישורים מובילים לקובץ הבחינה הרשמי במאגר משרד החינוך (או לעותק ציבורי כשהקובץ אינו במאגר) ולסרטון פתרון ביוטיוב. השאלות עצמן אינן מועתקות לחוברת. "ראשי" = הנושא המרכזי של השאלה; "משני" = סעיף או רכיב בשאלה.

שנה	מועד	שאלון	שאלה	סוג	בחינה	סרטון פתרון
2014	חורף	807	5	ראשי	PDF (רשמי)	יצחק אודסר
2010	חורף	807	4	ראשי	PDF (רשמי)	עובד לב ארי

התרגילים בחוברת מקוריים (נוצרו בהשראת סגנון הבגרות ואינם העתקה של שאלות משרד החינוך), וכל תשובה נבדקה אוטומטית ב-sympy. סרטוני הפתרון שייכים ליוצריהם ומקושרים בלבד.